

## Chapitre 11

### Probabilités sur un univers fini

**Exercice 1 :** On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de tirages différents sont possibles ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir un roi.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un cœur.
4. Calculer la probabilité d'obtenir un roi et un cœur.
5. Calculer la probabilité d'obtenir un roi ou un cœur.
6. Recommencer l'exercice en supposant que l'on tire deux cartes (« obtenir un » signifiera « obtenir au moins un »).

**Exercice 2 (Poker) :** On tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de tirages différents sont possibles ?
2. Calculer la probabilité d'avoir une suite couleur.
3. Calculer la probabilité d'avoir un carré.
4. Calculer la probabilité d'avoir un full.
5. Calculer la probabilité d'avoir une couleur.
6. Calculer la probabilité d'avoir une suite.
7. Calculer la probabilité d'avoir un brelan.
8. Calculer la probabilité d'avoir une double paire.
9. Calculer la probabilité d'avoir une paire.
10. Calculer la probabilité de n'avoir aucune combinaison.

**Exercice 3 :** Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. On tire une à une et sans remise trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde noire et la troisième blanche ?

**Exercice 4 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules blanches et  $n$  boules rouges. On tire les boules deux par deux et sans remise jusqu'à vider l'urne.

1. Calculer la probabilité  $p_n$  que l'on tire à chaque tirage une boule blanche et une boule rouge.
2. Étudier la convergence de la suite  $(p_n)$ . Interpréter le résultat.

**Exercice 5 :** Une urne  $A$  contient 6 boules blanches et 5 boules noires, tandis qu'une urne  $B$  contient 4 boules blanches et 8 boules noires. On transfère aléatoirement deux boules de l'urne  $B$  dans l'urne  $A$ , puis on tire une boule dans l'urne  $A$ .

1. Calculer la probabilité que l'on tire une boule blanche.
2. On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'au moins une boule blanche ait été transférée de l'urne  $B$  à l'urne  $A$ .

**Exercice 6 :** Une maladie est présente dans la population avec une fréquence de  $10^{-4}$ . On utilise un test pour dépister la maladie : si une personne est malade, le test est positif à 99%, tandis que si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

1. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est négatif.
2. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.

**Exercice 7 :** Dans une entreprise, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles acceptables.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

**Exercice 8** (Urnes de Polya) : On fixe des entiers  $b, r, d, n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient initialement  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges. On tire de celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de  $d$  boules de la même couleur. On répète l'expérience  $n$  fois. Déterminer la probabilité que la boule tirée lors du  $n$ -ième tirage soit blanche.

**Exercice 9** : Un professeur oublie fréquemment ses clés. On suppose que le premier jour, le professeur les oublie avec une probabilité  $p_1 \in [0, 1]$ . Ensuite, si un jour donné il les oublie, le jour suivant il les oublie avec une probabilité  $1/10$ . A contrario, s'il ne les oublie pas un jour donné, le lendemain il les oublie avec la probabilité  $4/10$ . On note  $p_n$  la probabilité que le professeur oublie ses clés le  $n$ -ième jour.

1. Déterminer une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ .
2. En déduire une expression de  $p_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$ . Interpréter le résultat.

**Exercice 10** : Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$ , c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité  $1-p$ , c'est l'information contraire qui est transmise. On note  $p_n$  la probabilité que l'information après  $n$  transmissions soit la même qu'au départ.

1. Déterminer une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ .
2. En déduire une expression de  $p_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$ . Interpréter le résultat.

**Exercice 11** : Soit  $X$  une variable aléatoire prenant ses valeurs dans  $[[0, N]]$ . Montrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n).$$

**Exercice 12** : On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note  $X$  la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Calculer la loi de  $X$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .
3. Calculer l'espérance de  $1/X$ .

**Exercice 13** : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une entreprise souhaite recruter un employé parmi  $n$  candidats. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle de manière indépendante un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est  $p \in ]0, 1[$ . On définit la variable aléatoire  $X$  par  $X = k$  si le  $k$ -ième candidat qui réussit le test est engagé, et  $X = n + 1$  si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Calculer l'espérance de  $X$ .
3. Quelle valeur faut-il choisir pour  $p$  pour que l'on ait plus d'une chance sur deux de recruter un candidat.

**Exercice 14** : Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y = n - X$ .

**Exercice 15** : Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ . Calculer l'espérance de la variable aléatoire

$$Y = \frac{1}{X + 1}.$$

**Exercice 16 :** Une armoire est constituée de trois tiroirs. On y range aléatoirement une chaussette verte, une rouge et une noire. On note  $X$  le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et  $N$  le nombre de tiroirs vides.

1. Déterminer la loi du couple  $(X, N)$ .
2. Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $N$ .
3. Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires  $X$  et  $N$ .
4. Les variables aléatoires  $X$  et  $N$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 17 :** On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont on note les résultats  $X$  et  $Y$ . On pose  $U = \min(X, Y)$  et  $V = \max(X, Y)$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(U, V)$ , puis la loi de  $U$  et la loi de  $V$ .
2. Calculer l'espérance de  $U$  et l'espérance de  $V$ .
3. Les variables aléatoires  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 18 :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Calculer  $P(X = Y)$ ,  $P(X \leq Y)$ ,  $P(X \neq Y)$ .
2. Déterminer la loi de  $Z = X + Y$ .
3. Calculer l'espérance de  $Z$  et l'espérance de  $XY$ .
4. Les variables aléatoires  $X$  et  $Z$  sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer la loi de  $M = \max(X, Y)$ .

**Exercice 19 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(X, Y)$  un couple suivant la loi uniforme sur l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

1. Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .
2. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 20 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  telles que  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ . On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = aij.$$

1. Déterminer la valeur de  $a$ .
2. Déterminer la loi de  $X$  et l'espérance de  $X$ .
3. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. Calculer  $P(X = Y)$ .
5. Déterminer la loi de  $M = \max(X, Y)$ .

**Exercice 21 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de  $n$  boîtes numérotées de 1 à  $n$ . La boîte  $k$  contient  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$ . On choisit au hasard de façon équiprobable une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note  $X$  le numéro de la boîte et  $Y$  le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .
3. Calculer l'espérance de  $X$  et de  $Y$ .

**Exercice 22 :** Soit  $(n, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On considère  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur  $\llbracket 1, N \rrbracket$ . On considère la variable aléatoire  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

1. Déterminer la loi de  $M_n$ .
2. Déterminer la limite de la suite  $(P(M_n = N))_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Interpréter le résultat.

**Exercice 23 :** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini telles que  $V(X) > 0$ . Déterminer pour quelle  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  la quantité  $E\left([Y - (aX + b)]^2\right)$  est minimale.

**Exercice 24 :** Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$k$	-2	-1	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

On note  $Y = X^2$ .

- Déterminer la loi de  $Y$  et la loi du couple  $(X, Y)$ .
- Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- Calculer la covariance de  $X$  et  $Y$ . Commentaire ?

**Exercice 25 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . À un péage autoroutier  $n$  voitures franchissent équiprobablement et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note  $X_1, X_2, X_3$  les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

- Déterminer la loi de  $X_1$ .
- Calculer les variances de  $X_1, X_2$  et de  $X_1 + X_2$ .
- En déduire la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ .

**Exercice 26 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ . On pose  $U = \min(X, Y)$  et  $V = \max(X, Y)$ .

- Déterminer la loi de  $U$  et la loi de  $V$ .
- Calculer l'espérance de  $U$  et l'espérance de  $V$ .
- Calculer la covariance de  $U$  et  $V$ .

**Exercice 27 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Un sac contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On tire successivement et sans remise deux jetons. On note  $X$  le numéro du premier jeton tiré et  $Y$  celui du second.

- Déterminer la loi du couple de  $(X, Y)$ , la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .
- Calculer la covariance de  $X$  et  $Y$ .
- Déterminer la loi de  $Z = |X - Y|$ .

**Exercice 28 :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 3$ . Une urne contient 2 boules blanches et  $n - 2$  boules rouges. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note  $X$  le rang de sortie de la première boule blanche et  $Y$  le rang de sortie de la seconde boule blanche.

- Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
- Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .
- Calculer l'espérance de  $X$  et l'espérance de  $Y$ .
- Calculer la covariance de  $X$  et  $Y$ .

**Exercice 29 (Estimation) :** Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue  $p \in ]0, 1[$ . On choisit un échantillon de  $n \in \mathbb{N}^*$  personnes et l'on pose  $X_i = 1$  si le  $i$ -ième individu présente la propriété étudiée,  $X_i = 0$  sinon. On considère que les variables aléatoires  $X_i$  sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

- Quelle est la loi suivie par  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  ?
- Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $S_n/n$ .
- Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer l'inégalité

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

- Quelle valeur de  $n$  doit-on choisir pour que  $S_n/n$  soit une approximation de  $p$  à 0,05 près avec une probabilité supérieure à 95% ?